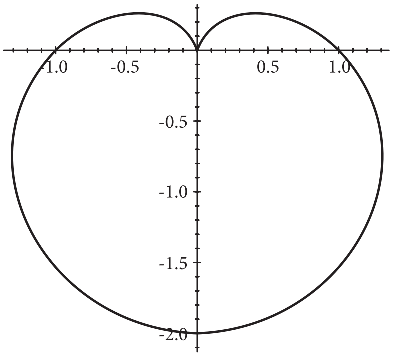
Krivulje srca

Aleksandar Hatzivelkos[1]

1. Srcolike krivulje

Standardni dio gradiva matematike na visokim i višim učilištima je obrada krivulja u polarnim koordinatama, tj. krivulja kojima koordinate pripadnih točaka zadajemo pomoću funkcije $r = r(\varphi)$, gdje je r udaljenost točke od ishodišta (dvodimenzijskog) koordinatnog sustava, a φ kut koji spojnica točke i ishodišta zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa. Nakon što se uobičajeno studentima prikažu zapisi jednadžba kružnice u polarnim koordinatama, često se prikaže i jednadžba *kardioide*, $r(\varphi) = a(1 - \sin\varphi)$.



Osim grafa izvedenog iz jednadžbe u polarnim koordinatama, kardioida predstavlja trag koji ostavlja točka na kružnici koja se rotira po rubu druge kružnice istog polumjera. Ime je krivulja dobila po tome što oblikom podsjeća na srce. Skovao ga je talijanski matematičar i astronom Giovanni Francesco Mauro Melchiorre Salvemini di Castiglione 1741. godine, iako treba napomenuti da se kardioida u tom trenutku proučavala već desetljećima. Zapiše li se jednadžba kardiode u Kartezijevim koordinatama, dobivamo implicitnu jednadžbu:

$$(x^2 + y^2 - 2ay)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

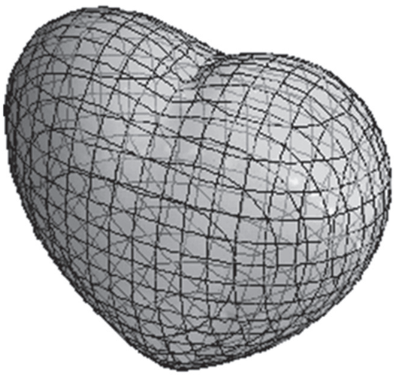
[1] Aleksandar Hatzivelkos, predavač, Veleučilište Velika Gorica

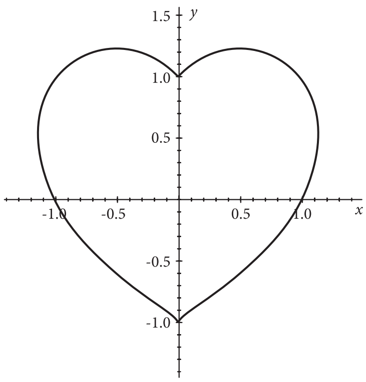
Naravno, treba biti pošten i priznati da kardioida više sliči na poprečni presjek jabuke nego li na srce. Ipak, matematičko zapisivanje jednadžbi srcolikih krivulja već stoljećima privlači ljude.

Posebno se plodnim pokazalo implicitno zapisivanje jednadžbi srcolikih krivulja. Jedna od poznatijih je jednadžba

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 y^3 = 0 .$$

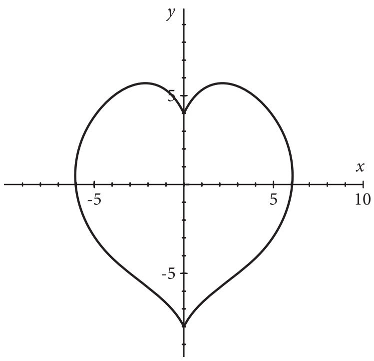
Ta jednadžba dobivena je presijecanjem „srčane" plohe koju je 1993. godine formirao Gabriel Taubin. Tijekom rada na algoritmima za vizualizaciju algebarskih površina, Taubin je došao do konstrukcije plohe oblika srca. Ukoliko se ta ploha, u Taubinovom radu dana jednadžbom $(x^2 + 1.5^2 y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2 z^3 - \frac{1.5^2}{20} y^2 z^3 = 0$, presječe ravninom $y = 0$, dobiva se opisana krivulja oblika srca.





Još jednu implicitnu jednadžbu srcolike krivulje predstavio je 2006. godine P. Kuriscak:

$$x^2 + \left[y - \frac{2\left(x^2 + |x| - 6\right)}{3\left(x^2 + |x| + 2\right)} \right]^2 = 36$$

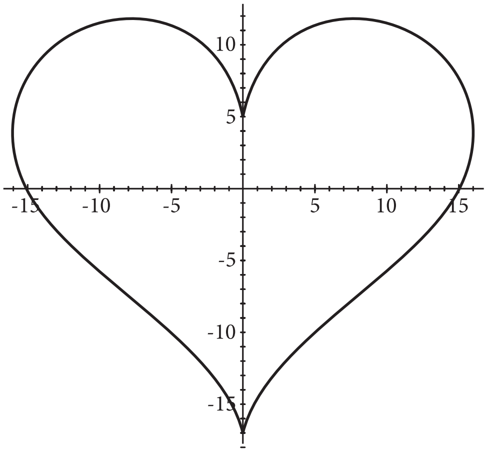


Osim u implicitnom obliku, krivulje se mogu zadavati i parametarski. U tom slučaju obje su koordinate točaka krivulje zadane kao funkcije nekog parametra *t*. Klasičan primjer parametarski zadane krivulje je parametarska jednadžba kružnice, od kojih je najraširenija ona koja vrijednosti koordinata određuje uz pomoć trigonometrijskih funkcija:

$$r\ldots\begin{cases} x(t) = a\cdot\cos t \\ y(t) = a\cdot\sin t \end{cases}$$

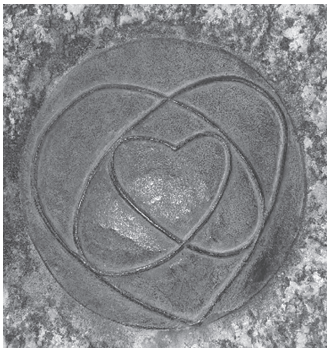
gdje je *a* vrijednost polumjera kružnice. Takav način zadavanja krivulja pokazao se plodonosnim kada su u pitanju srcolike krivulje. Primjera je mnogo. Neki od načina konstruiranja parametarskih jednadžbi srcolikih krivulja krenuli su od razdvajanja „gornjeg" (odnosno „zaobljenijeg") i „donjeg" dijela srcolike krivulje, parametrizirajući ih dvjema različitim funkcijama. No, najelegantnijim su se pokazale srcolike krivulje parametrizirane uz pomoć trigonometrijskih funkcija. Ovaj put donosimo jednu od najljepših:

$$r\ldots\begin{cases} x(t) = 16\cdot\sin^3 t \\ y(t) = 13\cdot\cos t - 5\cdot\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t \end{cases}$$

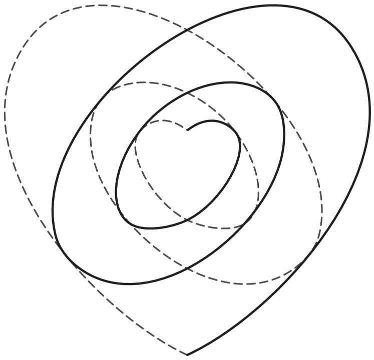


2. Beskonačna ugniježđena krivulja oblika srca

Matematiku je doslovno moguće naći svugdje, ukoliko se svijet želi promatrati na taj način. Inspiracija za doprinos ovoj temi pronađena je na zagrebačkome Jarunu, gdje se na Otoku hrvatske mladeži smjestila umjetnička instalacija „*Solarni pleksus Europe*". Između radova kojima su brojni umjetnici kreirali svoj dio instalacije, nalazi se i rad Miroslava Juraja, čije je djelo obilježeno simbolom triju srca ugniježđenih jedno u drugo.



Poznato je da se oblik srca može dobiti preklapanjem dviju elipsa, no ovaj koncept ide dalje. Krivulje koje formiraju srca ugniježđena jedno u drugome može se promatrati kao spoj dviju elipsoidnih spirala čiji promjer opada s parametrom (kutom) koji je opisuje.



Stoga je parametrizaciju ovakvih krivulja prirodno potražiti u obliku:

$$r \ldots \begin{cases} x(t) = a(t) \cdot \cos t \\ y(t) = k \cdot a(t) \cdot \sin t \end{cases}$$

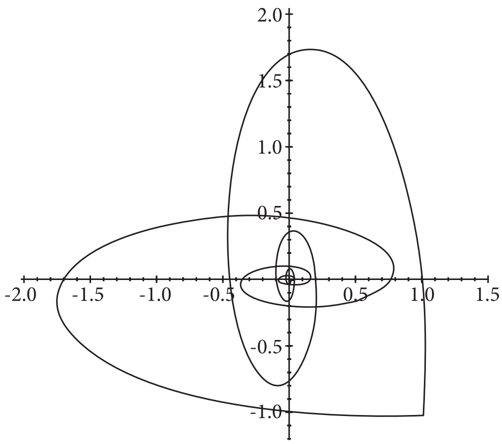
gdje je funkcija $a(t)$ monotono padajuća funkcija koja teži nuli kada t teži beskonačnom. Također treba primijetiti da dvije elipsoidne spirale koje tvore ovaj ugniježđeni srcoliki oblik rotiraju u suprotnim smjerovima, te imaju zamijenjene poluosi. Stoga ćemo drugu krivulju dobiti tako da zamijenimo parametrizacije za x i y koordinate prve krivulje te im promijenimo predznak. Imamo dakle:

$$r_1 \ldots \begin{cases} x_1(t) = a(t) \cdot \cos t \\ y_1(t) = k \cdot a(t) \cdot \sin t \end{cases} \qquad r_2 \ldots \begin{cases} x_2(t) = -k \cdot a(t) \cdot \sin t \\ y_2(t) = -a(t) \cdot \cos t \end{cases} \tag{1}$$

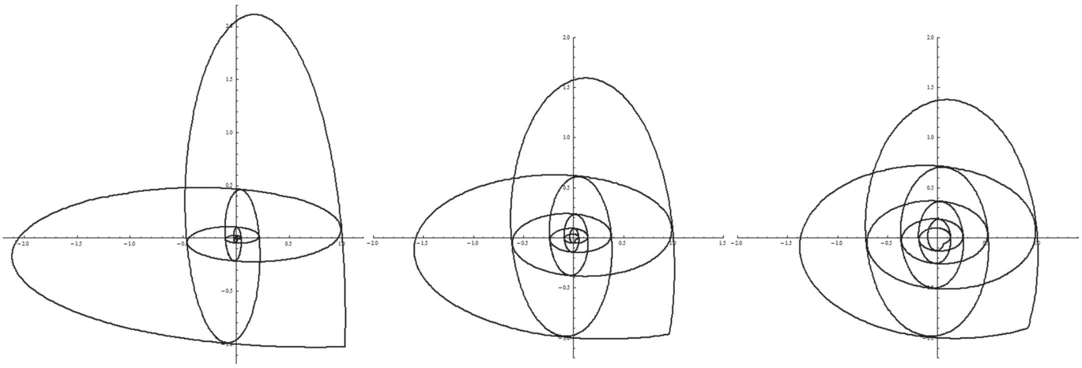
Zatim se postavlja pitanje određivanja funkcije $a(t)$. Osim što znamo da treba biti pozitivna monotono padajuća, funkcija $a(t)$ treba osigurati „ugniježđenost" elipsoidne spirale. To se može postići ukoliko se spirala smanjuje na način da je omjer veličine pripadne elipse i elipse nakon punog kruga konstantan, tj. da vrijedi $\frac{a(t)}{a(t+2\pi)}=C$ za svaki *t*. Ovakvo svojstvo posjeduje eksponencijalna funkcija, $a(t)=e^{\alpha t}$, budući da je tada $\frac{a(t)}{a(t+2\pi)}=\frac{e^{\alpha t}}{e^{\alpha(t+2\pi)}}=\frac{e^{\alpha t}}{e^{\alpha t}\cdot e^{2\pi\alpha}}=C$. Dakle, prirodno je ispitati možemo li dobiti gornji srcoliki oblik pomoću parametarski zadanih krivulja

$$r_1 \ldots \begin{cases} x_1(t)=e^{\alpha t}\cdot\cos t \\ y_1(t)=k\cdot e^{\alpha t}\cdot\sin t \end{cases} \qquad r_2 \ldots \begin{cases} x_2(t)=-k\cdot e^{\alpha t}\cdot\sin t \\ y_2(t)=-e^{\alpha t}\cdot\cos t \end{cases} \tag{2}$$

U tim jednadžbama parametrom *k* određujemo odnose poluosi elipsoidnih spirala, tj. mjeru koliko će jedna poluos biti duža od druge, te time utječemo na konačni izgled srcolikog oblika. S druge strane, parametar α (koji je negativne vrijednosti) omogućava nam da odredimo brzinu kojom će se smanjivati dimenzije spirale, te na taj način možemo postići da srca uistinu budu ugniježđena, tj. da unutarnje srce tangira vanjsko. Što je vrijednost negativnog parametra α manja (tj. veća po apsolutnoj vrijednosti), to će veličina spirale brže opadati. Tako, primjerice, za parametre $k=2.5$, $\alpha=-0.25$ u *Wolfram Mathematici* dobivamo sljedeću sliku:



Vidimo da za ovu kombinaciju odabranih parametara dimenzije elipsa prebrzo opadaju, pa se ne postiže efekt ugniježđenosti (tangiranja), što znači da vrijednost parametra α treba biti veća. S druge strane, estetska (vizualna) zamjerka mogla bi biti (iako se o ukusima ne raspravlja) da je srcoliki oblik „preizbočen", tj. da vrijednost parametra *k* treba biti manja. Variranjem vrijednosti tih dvaju parametara u jednadžbi (2) mogu se dobiti razni ugniježđeni srcoliki oblici, a u sljedećoj slici donosimo tri u kojima smo varirali vrijednost parametra *k*, od *k* = 3, *k* = 2 do $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pri čemu je α odabran na način da se dobije efekt „ugniježđenosti":



Iako se, kako smo već spomenuli, o ukusima ne raspravlja, kao estetski najljepšu razni su sugovornici od ove tri srcolike krivulje isticali baš treću. Zanimljivo je da je kod te srcolike krivulje omjer poluosi elipsoidnih spirala koje ju tvore jednak vrijednosti *zlatnog reza*, $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Na kraju, da bismo dobili vizualni efekt s početka ovoga teksta, dobivene elipsoidne spirale potrebno je zarotirati za kut od $-\frac{\pi}{4}$ kako bi ugniježđena srca stajala uspravno. To ćemo postići tako što ćemo radij vektore točaka obaju krivulja $r_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ i $r_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ pomnožiti (s lijeva) matricom rotacije za kut $-\frac{\pi}{4}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (matricu nismo normirali kako ne bismo nepotrebno komplicirali jednadžbu). Sada je

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cdot \cos t \\ k \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cdot \cos t + k \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin t \\ -e^{\alpha t} \cdot \cos t + k \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin t \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -k \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin t \\ -e^{\alpha t} \cdot \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{\alpha t} \cdot \cos t - k \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin t \\ -e^{\alpha t} \cdot \cos t + k \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin t \end{bmatrix} \tag{4}$$

U kraćem obliku jednadžbe (3) i (4) možemo zapisati na sljedeći način:

$$r_{1,2} = e^{\alpha t} \cdot \begin{bmatrix} \pm \cos t \pm k \cdot \sin t \\ -\cos t + k \cdot \sin t \end{bmatrix}$$

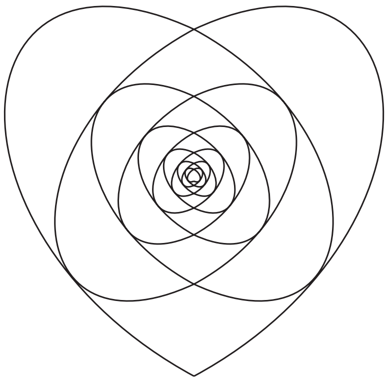
Iako je taj zapis parametarske jednadžbe krivulja koje tvore beskonačno ugniježđena srca sasvim dovoljan i elegantan, napravit ćemo i korak više. Zapišemo li jednadžbe (3) i (4) pomoću proširenja eksponencijalne funkcije na kompleksne brojeve, $e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha} \cdot (\cos\beta + i\sin\beta)$, zapis prelazi u:

$$r_1 = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} e^{t(\alpha+i)} + k \cdot \operatorname{Im} e^{t(\alpha+i)} \\ -\operatorname{Re} e^{t(\alpha+i)} + k \cdot \operatorname{Im} e^{t(\alpha+i)} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$r_2 = \begin{bmatrix} -\operatorname{Re} e^{t(\alpha+i)} - k \cdot \operatorname{Im} e^{t(\alpha+i)} \\ -\operatorname{Re} e^{t(\alpha+i)} + k \cdot \operatorname{Im} e^{t(\alpha+i)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Na samome kraju, uvrštavanjem parametara $k = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = -0.1$ u jednadžbe (5) i (6), neka ovo ugniježđeno srce bude mala posveta Euleru i njegovoj prekrasnoj formuli $e^{\pi \cdot i} + 1 = 0$:

$$r_{1,2} = \begin{bmatrix} \pm\operatorname{Re} e^{t(i-0.1)} \pm \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{Im} e^{t(i-0.1)} \\ -\operatorname{Re} e^{t(i-0.1)} + \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{Im} e^{t(i-0.1)} \end{bmatrix}$$



Literatura

1. Weisstein, Eric W. „Heart Surface." From MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/HeartSurface.html
2. Weisstein, Eric W. „Heart Curve." From MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/HeartCurve.html